შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

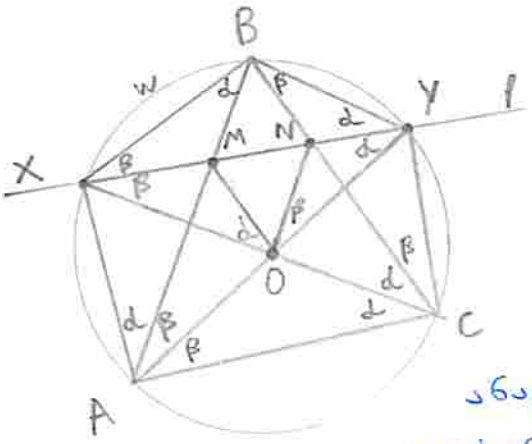
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 13

20.04.2013/ მათ/I/ 065

ამოცანა № 1

გვერდი № 1



წრეზის AB და BC სეკანტებზე გადავავლოთ წრეფილები და ავიღოთ X და Y, შესაბამისად.

$\angle XBA$ დაყრდნობილია $\overset{\frown}{XA}$-ზე
$\angle BYX$ დაყრდნობილია $\overset{\frown}{XB}$-ზე
X არის $\overset{\frown}{AB}$-ს შუაზე გადაყოფი
ანუ $\overset{\frown}{XA} = \overset{\frown}{XB}$ ე.ი. $\angle XBA = \angle BYX = \alpha$.

ანალოგიურად, $\angle CBY$ და $\angle BXY$ არიან დაყრდნობილი w წრეწირის ერთი ნაძენის სეკანტზე,
ანუ $\angle CBY = \angle BXY = \beta$.

$\angle BNM$ არის $\triangle BNY$-ის გარე კუთხე და გვაქვს $\angle BNM = \angle BYN + \angle NBY = \alpha + \beta$. $\angle BMN$ არის $\triangle XBM$-ის გარე კუთხე → $\angle BMN = \angle BXM + \angle XBM = \alpha + \beta$.
ე.ი. $\angle BNM = \angle BMN = \alpha + \beta$. ეს ნიშნავს, რომ $\triangle MBN$ ტოლფერადია
და $\underline{MB = BN}$.

$\angle BAC$-ს $\underline{AY}$ ბისექტრისაა, ხოლო $\angle BCA$-ს $\underline{CX}$ არის ბისექტრისა. ე.ი. $\triangle ABC$-ში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი O არის AY-ის და CX-ის 33ეთის წრეცენტრი.

შევნიშნოთ, რომ $\angle NYO$ და $\angle NCO$ ეყრდნობიან ერთ წრეწირის ერთი ნაძის სეკანტს. ე.ი. NYCO ციკლურია. ე.ი. $\angle NOY = \angle NCY = \beta$
ე.ი. $\angle NOY = \beta = \angle BAY$ ე.ი. $AB \parallel ON$ ე.ი. $\underline{MB \parallel ON}$.

შევნიშნოთ, რომ $\angle MAO$ და $\angle MXO$ ეყრდნობიან ერთ წრეწირის ერთი ნაძის სეკანტს. ე.ი. MXAO ციკლურია. ე.ი. $\angle MOX = \angle MAX = \alpha$.
ე.ი. $\angle MOX = \alpha = \angle BCX$ ე.ი. $MO \parallel BC$. ე.ი. $\underline{MO \parallel BN}$.

სამოცდაერთ, გვაქვს რომ BNOM მახასიათებელში
$MB = BN$, $MB \parallel ON$, $OM \parallel NB$.
გვაქვს რომ $\angle BMN = \angle MNO$ და $\angle BNM = \angle NMO$. გვაქვს რომ $\triangle BNM = \triangle OMN$.
ე.ი. $BM = BN = ON = OM$, ე.ი. $\underline{BNOM \text{ რომბია}}$. ს.ფ.ტ.

გადავიყვანოთ 2013 ორეულ სისტემაში:

$2013_{10} = 11111011101_2$

ე.ი. $2013 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0$

ცხადია, რომ ეს ფუნქცია ვუჩვენებდეთ 2013-ის 9 ცალი ერთეულ ხარისხის ჯამით წარმოდგენას

$f(1) = 9$ ცოლობიდან ჩანს, რომ f-ის კოეფიციენტების ჯამია 9. ასევე ვიცით $f(2) = 2013$ ანუ 2013 f-ის წარმოდგენილია 9 ცალი (არაუარყოფითი გაერთიანებული) ორის ხარისხების ჯამად, მაგალითად: $5 \cdot 2^x + 1 \cdot 2^y + 3 \cdot 2^z$.

რომელიც ნიშნავს ვიჩვენეთ, 2013-ის 9 ცალი ორის ხარისხის წარმოდგენის მხოლოდ ერთი ვარიანტია:

ანუ $f(x) = x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$.

თუ ამოცანაში f მიკუთვნებული ნულოვანი კოეფიციენტების ასახვისთვის იგულისხმება, მაშინ

$x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$

ჯერ ეძებდა $a_n x^n$ ფორმის წევრებს, სადაც $a_n = 0$.

გავავლოთ ამოცანა და განვიხილოთ $A=\{1, 2, \dots n\}$ სიმრავლე. n სამის ჯერადია. თითოეული $S(A_i)$-ისგან ერთ ერთ სიდიდეზე $S(A_i) \le n$. K_n ეკუთვნოდეთ K-ს მაქსიმალური შესაძლო მნიშვნელობის კონკრეტული n-ისგან. დავამტკიცოთ, რომ $K_n \le \frac{n}{3}$. დავამტკიცოთ ინდუქციით. ბაზის სახით $n=3$, $K_n=0$, და $K_n \le \frac{n}{3}$ ჭეშმარიტ სიტყვებია.

დავამტკიცოთ, რომ თუ n-ისგან $n+1, n+2, n+3$ ელементების დამატებით A სიმრავლეში K გაიზრდება ერთეულით. ცხადია ერთი თითოეული $S(A_i) \le n+3$. ~~[illegible]~~ დავუშვათ საწინააღმდეგო — დავუშვათ რომ თითოეულ A_i-ში ერთ ერთ ელემენტი x ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ A_i-ში. დავუშვათ ეს სიტყვებია (x, y) და (a, b). $x+y \le n+3$, $a+b \le n+3$. ზოგადობის შეუზღუდავად $x<y$ და $a<b$. ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~$x+y<n+3 \Rightarrow 2x+1<n+3 \Rightarrow x \le \frac{n}{2}+1$.~~
~~$a+b \le n+3 \Rightarrow 2a+1 \le n+3 \Rightarrow a \le \frac{n}{2}+1$~~ $\Rightarrow x+a \le n+2$, $x+a \le n+1$

~~[illegible]~~

~~ე.ი. $x+a \le n+1$. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $a=x+1$ [illegible] $x=n/2$ და $a=n/2+1$. [illegible] [illegible] [illegible] $x=a+1$.~~

ცხადია, რომ ეს შემთხვევაში $a \le \frac{n}{2}$ და $x \le \frac{n}{2}$. მაგრამ ეს შეიძლება, რომ $a+x \le n$, და ანუ K_n ის ყოველ მაქსიმალურ შესაძლო. მივიღეთ წინააღმდეგობა. გამოვიდა, რომ K_n ერთი A_i სიმრავლის გარეშე შეიძლებოდეს ერთ ერთ $\{a, x\}$ სიმრავლის შემცველი.

გამოდის რომ, $A=\{1, 2, \dots, n\}$ სიმრავლის $S(A_i) \le n+3$ $n+1, n+2, n+3$ ელემენტების დამატებით და k შემოსაღვის შესაძლია, თავი k ნაკრების რომელიმეზე, ანუ k იმრიცხება 0-ით ან 1-ით. რადგან დამატებული რომ ისევ k ვერ იმრიცხება.

შესაბამისად. $k_{n+3} \le k_n + 1$ $\left(k_n < \frac{n}{3}\right)$

(n სამის ჯერადია)

ე.ი. $k_{n+3} < \frac{n+3}{3}$.

გამოდის რომ $k_{2013} < \frac{2013}{3} = 671$.

ე.ი. ჩვენ ამოცანაში k ვერ გადააჭარბებს 670-ს.

ვარჯიშია, რომ 670 მიღწევადია:

ერთ-ერთი მაგალითი:

$A_1 = \{1, 2012\}$ $S(A_1) = 2013$.

$A_2 = \{2, 2010\}$ $S(A_2) = 2012$.

$A_3 = \{3, 2008\}$ $S(A_3) = 2011$.

$A_4 = \{4, 2006\}$ $S(A_4) = 2010$.

$\vdots$

$A_k = \{670, 672\}$ $S(A_k) = 1342$.

$k = 670$.

ე.ი. ჩვენ ამოცანაში k-ს მაქსიმალური მნიშვნელობა 670.